Eléments de correction du livret

Factorisation, développement

Exercice 1 **

Pour tout x réel,

$\mathbf{A} = 3x(4x^2 - 1) = \mathbf{3x(2x-1)(2x+1)}$

$\boldsymbol{B} = (x-2)(x+2) + (x+2)(x+3) = (x+2)((x-2)+(x+3)) = \mathbf{(x-2)(2x+1)}$

$\boldsymbol{C} = (3x-2)(x+5) + (3x-2)(3x+2) = (3x-2)((x+5)+(3x+2)) = \mathbf{(3x-2)(4x+7)}$

$\boldsymbol{D} = (3x-1)(3x+1) + (3x+1)(2x+3) = (3x+1)((3x-1)+(2x+3)) = \mathbf{(3x+1)(5x+2)}$

$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{12}}\right)\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{12}}\right)$

$\boldsymbol{F} = \left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}$

$\boldsymbol{G} = (x+3)^2 - (x+3)(x-2) = (x+3)\big((x+3)-(x-2)\big) = \mathbf{5(x+3)}$

Exercice 2 *

1. $\boldsymbol{f}(\mathbf{-1+\sqrt{2}}) = 5(-1+\sqrt{2})^2 - 3(-1+\sqrt{2}) + 2 = 5(1+2-2\sqrt{2}) + 3 - 3\sqrt{2} + 2 = \mathbf{20 - 13\sqrt{2}}$

2.a. Pour tout réel a et b,

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

b. Pour tout réel h,

$f(1+h) = -4(1+h)^3 + 2(1+h)^2 + (1+h) + 1$

$f(1+h) = -4(1^3 + 3\times 1^2 \times h + 3 \times 1 \times h^2 + h^3) + 2(1+2h+h^2) + 2 + h$

$f(1+h) = -4(1+3h+3h^2+h^3) + 2 + 4h + 2h^2 + 2 + h$

$\boldsymbol{f(1+h)} = -4 - 12h - 12h^2 - 4h^3 + 2h^2 + 5h + 4 = \boldsymbol{-4h^3 - 10h^2 - 7h}$

Exercice 3 **

$$A=\frac{a(a+b)}{b(b+a)}=\frac{a}{b}$$

$$B=\frac{\frac{(1+\pi)}{(1-\pi)(1+\pi)}-\frac{(1-\pi)}{(1-\pi)(1+\pi)}}{\frac{1(\pi^2-1)}{1(\pi^2-1)}+\frac{1}{(\pi^2-1)}}=\frac{\frac{(1+\pi)-(1-\pi)}{(1-\pi)(1+\pi)}}{\frac{(\pi^2-1)+1}{(\pi^2-1)}}=\frac{\frac{2\pi}{(1-\pi)(1+\pi)}}{\frac{\pi^2}{(\pi-1)(\pi+1)}}$$

$$B=\frac{2\pi}{(1-\pi)(1+\pi)}\div\frac{\pi^2}{(\pi-1)(\pi+1)}=\frac{2\pi}{(1-\pi)(1+\pi)}\times\frac{(\pi-1)(\pi+1)}{\pi^2}$$

$$\boldsymbol{B=-\frac{2}{\pi}}$$

Exercice 4 **

1. Pour tout $x\neq-5$ et tout $x\neq-9$,

$$\frac{3}{5+x}-\frac{4}{9+x}=\frac{3(9+x)}{(5+x)(9+x)}-\frac{4(5+x)}{(9+x)(5+x)}=\frac{3(9+x)-4(5+x)}{(5+x)(9+x)}=\frac{27+3x-20-4x}{(5+x)(9+x)}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{5+x}-\frac{4}{9+x}=\frac{7-x}{(5+x)(9+x)}}$$

2. Pour tout $x\neq0$,

$$\frac{2x+1}{x^2}-\frac{4x-5}{x}+1=\frac{2x+1}{x^2}-\frac{x(4x-5)}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}=\frac{2x+1-x(4x-5)+x^2}{x^2}=\frac{2x+1-4x^2+5x+x^2}{x^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{2x+1}{x^2}-\frac{4x-5}{x}+1=\frac{-3x^2+7x+1}{x^2}}$$

3. Pour tout $x\in I$

$$\boldsymbol{f(x)}=\frac{1}{x}\left(\frac{(x+1)}{(x+1)}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)=\frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}=\boldsymbol{\frac{1}{x+1}}$$

4. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;0\,;1\}$

$$\frac{f\left(\frac{2}{a}\right)}{a}=\frac{\frac{4}{4-\left(\frac{2}{a}\right)^2}}{a}=\frac{\frac{4}{4-\frac{4}{a^2}}}{a}=\frac{\frac{4}{\frac{4a^2}{a^2}-\frac{4}{a^2}}}{a}=\frac{\frac{4}{\frac{4a^2-4}{a^2}}}{a}=\frac{4\div\left(\frac{4a^2-4}{a^2}\right)}{a}=\frac{4\times\frac{a^2}{4(a^2-1)}}{a}$$

$$\frac{\boldsymbol{f\left(\frac{2}{a}\right)}}{\boldsymbol{a}}=\frac{a^2}{(a^2-1)}\div a=\frac{a^2}{(a^2-1)}\times\frac{1}{a}=\frac{a}{(a^2-1)}=\boldsymbol{\frac{a}{(a-1)(a+1)}}$$

Equations, inéquations

Exercice 1 *

$(5x-1)(x-9)-(x-9)(2x-1)=0$

$(x-9)\big((5x-1)-(2x-1)\big)=0$

$(x-9)(3x)=0$

$\boldsymbol{\mathcal{S}=\{9\,;0\}}$

$(4x+3)^2=(5x-1)^2$

$(4x+3)^2-(5x-1)^2=0$

$\big((4x+3)-(5x-1)\big)\big((4x+3)+(5x-1)\big)=0$

$(-x+4)(9x+2)=0$

$\boldsymbol{\mathcal{S}=\left\{4\,;-\frac{2}{9}\right\}}$

$(6x-3)^2-(2x-1)=0$

$\big(3(2x-1)\big)^2-(2x-1)=0$

$9(2x-1)^2-(2x-1)=0$

$(2x-1)(9(2x-1)-1)=0$

$(2x-1)(18x-10)=0$

$\boldsymbol{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\,;\frac{5}{9}\right\}}$

$$x+1=\frac{9}{x+1}$$

$VI :\ -1$ On résout dans $E=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$x+1-\frac{9}{x+1}=0$$

$$\frac{(x+1)^2}{x+1}-\frac{9}{x+1}=0$$

$$\frac{(x+1)^2-9}{x+1}=0$$

$(x+1)^2-9=0$ et $x\neq -1$

$((x+1)-3)((x+1)+3)=0$ et $x\neq -1$

$(x-2)(x+4)=0$ et $x\neq -1$

$2\in E$ et $-4\in E$ donc $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{2}\,;-\mathbf{4}\}$

$$\frac{3x-1}{x-5}=\frac{3x-4}{x}$$

$VI :\ 0$ et 5 : On résout dans $E=\mathbb{R}\backslash\{0\,;5\}$

$$\frac{3x-1}{x-5}-\frac{3x-4}{x}=0$$

$$\frac{(3x-1)x-(3x-4)(x-5)}{x(x-5)}=0$$

$$\frac{3x^2-x-3x^2+15x+4x-20}{x(x-5)}=0$$

$18x-20=0$ et $x\neq 0$ et $x\neq 5$

$\frac{10}{9}\in E$ donc $\boldsymbol{S}=\left\{\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}\right\}$

$$\frac{x^2-3x}{x-3}=4$$

$VI :\ 3$: On résout dans $E=\mathbb{R}\backslash\{3\}$

$$\frac{x^2-3x}{x-3}-\frac{4(x-3)}{x-3}=0$$

$$\frac{x(x-3)-4(x-3)}{x-3}=0$$

$(x-3)(x-4)=0$ et $x\neq 3$

$4\in E$ *mais* $3\notin E$ donc $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{4}\}$

Exercice 2 **

$(-5x-4)(7-3x) \leq 0$

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$(-5x-4)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(7-3x)$		$+$	|	$-\quad +$	0	$-$	
$(-5x-4)(7-3x)$		$+$	0	$-\quad -$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\,;\,\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right]$

$(2x-3)^2 > (3x-7)^2$

$(2x-3)^2 - (3x-7)^2 > 0$

$\big((2x-3)-(3x-7)\big)\big((2x-3)+(3x-7)\big) > 0$

$(-x+4)(5x-10) > 0$

$\mathcal{S} =]\mathbf{2}\,;\mathbf{4}[$

$(3x+2)^2 - (3x+2)(5x+1) \leq 0$

$(3x+2)\big((3x+2)-(5x+1)\big) \leq 0$

$(3x+2)(-2x+1) \leq 0$

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right] \cup \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,;\,+\infty\right[$

$\dfrac{-5x-2}{-13x+7} \geq 0$ $\quad\quad VI : \dfrac{7}{13}$: On résout dans $E = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{7}{13}\right\}$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{5}$			$\frac{7}{13}$		$+\infty$
$(-5x-2)$		$+$	0	$-$			$-$	
$(-13x+7)$		$+$		$-$	$+$	0	$-$	
$\dfrac{-5x-2}{-13x+7}$		$+$	0	$-$	$-$	‖	$+$	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right] \cup \left]\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{13}}\,;\,+\infty\right[$

$\dfrac{x^2-16}{9-4x^2} \geq 0$ $\quad\quad VI : \dfrac{3}{2}\ et\ -\dfrac{3}{2} : On\ résout\ dans\ E = \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right\}$

$\dfrac{(x-4)(x+4)}{(3-2x)(3+2x)} \geq 0$ $\quad\quad \mathcal{S} = \left[-\mathbf{4}\,;\,-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right[\cup \left]\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\,;\,\mathbf{4}\right]$

$\dfrac{3}{2x-1} \geq \dfrac{2}{-3x+15}$ $\quad\quad VI : \dfrac{1}{2}$ et 5 : On résout dans $E = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\,;5\right\}$

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{-3x+15} \geq 0$$

$$\frac{3(-3x+15)-2(2x-1)}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0$$

$$\frac{-9x+45-4x+2}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0$$

$\dfrac{-13x+47}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0$ $\quad\quad \mathcal{S} = \left]\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,;\,\dfrac{\mathbf{47}}{\mathbf{13}}\right] \cup \left]\mathbf{5}\,;\,+\infty\right[$

$$\frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x+1}{2x+3} \qquad VI : \frac{-3}{2} \text{ et } -1 : \text{On résout dans } E = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2} ; -1\right\}$$

$$\frac{2x+3}{x+1} - \frac{x+1}{2x+3} \geq 0$$

$$\frac{(2x+3)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(2x+3)} \geq 0$$

$$\frac{((2x+3)-(x+1))((2x+3)+(x+1))}{(x+1)(2x+3)} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(3x+4)}{(x+1)(2x+3)} \geq 0 \qquad \boldsymbol{\mathcal{S}} =]-\infty\,;\,-\mathbf{2}] \cup \left]\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}\,;\,\frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{3}}\right] \cup]-\mathbf{1}\,;\,+\infty[$$

$$\frac{x-3}{x+1} + \frac{2x+5}{x-2} \geq 3 \qquad VI : 2 \text{ et } -1 : \text{On résout dans } E = \mathbb{R}\backslash\{2\,;-1\}$$

$$\frac{x-3}{x+1} + \frac{2x+5}{x-2} - 3 \geq 0$$

$$\frac{(x-3)(x-2) + (2x+5)(x+1) - 3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3x + 6 + 2x^2 + 2x + 5x + 5 - 3(x^2 - 2x + x - 2)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{5x+17}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left[-\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{5}}\,;\,-\mathbf{1}\right[\cup]\mathbf{2}\,;\,+\infty[$$

$$\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}\geq\frac{5}{(x+1)(x-1)}$$

VI : 1 et -1 : On résout dans $E=\mathbb{R}\backslash\{1\,;-1\}$

$$\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{5}{(x+1)(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{3(x-1)+2(x+1)-5}{(x+1)(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{3x-3+2x+2-5}{(x+1)(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{5x-6}{(x+1)(x-1)}\geq 0$$

$$\boldsymbol{S}=\left]-\mathbf{1}\,;\,\mathbf{1}\right[\cup\left[\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\,;\,+\infty\right[$$

Fonctions

Exercice 1 **

1) $f(x)=4x^2-16x+12$
2) $\boldsymbol{f(x)=4(x-1)(x-3)}$
3)

a) En utilisant la forme de départ : $f(2)=-4$

b) En utilisant la forme développée : $f(x)=12$ devient $4x^2-16x=0$ puis $4x(x-4)=0$ $\mathcal{S}=\{0\,;4\}$

c) Pour déterminer l'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées, on résout $\begin{cases}y=f(x) & M(x;y)\in\mathcal{C}_f\\ x=0 & M(x;y)\in(Oy)\end{cases}$

L'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées est le point M de coordonnées $(0\,;f(0))$

On utilise la forme développée, pour calculer $f(0)$. $f(0)=12$

L'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées est donc le point M de coordonnées $(\mathbf{0}\,;\mathbf{12})$.

d) Pour déterminer l'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses, on résout $\begin{cases}y=f(x) & N(x;y)\in\mathcal{C}_f\\ y=0 & N(x;y)\in(Ox)\end{cases}$

On trouve donc les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses en résolvant $f(x)=0$

En utilisant la forme factorisée, l'équation à résoudre est : $4(x-1)(x-3)=0$ $\mathcal{S}=\{1;\,3\}$

Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont $\boldsymbol{N}(\mathbf{1}\,;\mathbf{0})$ et $\boldsymbol{P}(\mathbf{3}\,;\mathbf{0})$.

e) On utilise la forme de départ :

$(2x-4)^2-4=-4$

$(2x-4)^2=0$

$\mathcal{S}=\{2\}$

f) On utilise la forme factorisée : $f(3)=0$

Exercice 2 **

1) $f(x)=2(x+4)^2-18=2\left(x^2+8x+18\right)-18=2x^2+16x+32-18=2x^2+16x+14$
2) Pour tout réel x,

$2(x+4)^2\geq 0$

$2(x+4)^2-18\geq -18$

f admet un minimum -18. Il est atteint pour x tel que $f(x)=-18$

$f(x)=-18$

$2(x+4)^2-18=-18$

$2(x+4)^2=0$

$x=-4$

f admet un minimum -18 atteint pour $x=-4$

3) $f(x)=2\left((x+4)^2-9\right)=2(x+4+3)(x+4-3)=2(x+7)(x+1)$
4) Pour résoudre $f(x)=0$ on utilise la forme factorisée. $\mathcal{S}=\{-7\,;\,-1\}$

Pour résoudre $f(x)=14$ on utilise la forme de départ. $\mathcal{S}=\{-8\,;\,0\}$

Pour résoudre $f(x)=-20$ on utilise la question 2) : f admet un minimum -18 donc pour tout réel x,

$f(x)\geq -18>-20$ et **l'équation $f(x)=-20$ n'admet pas de solution**.

5) Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f avec l'axe des abscisses

Exercice 3

1) Développer $-2(x-1)^2+13$ pour obtenir $-2x^2+4x+11$
2) Pour tout réels a et b de $\left]-\infty\,;1\right]$ avec $a\leq b\leq 1$

$a\leq b\leq 1$

$a-1\leq b-1\leq 0$

$(a-1)^2\geq(b-1)^2\geq 0$ car la fonction carré est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,0\right]$

$-2(a-1)^2\leq -2(b-1)^2\leq 0$ multiplication par un nombre réel négatif

$-2(a-1)^2+13\leq -2(b-1)^2+13\leq 13$

$f(a)\leq f(b)$

Donc la fonction f est croissante sur $\left]-\infty\,;1\right]$ (définition d'une fonction croissante)

3) Pour tout réels a et b de $[1;+\infty[$ avec $1 \leq a \leq b$

$1 \leq a \leq b$

$0 \leq a-1 \leq b-1$

$0 \leq (a-1)^2 \leq (b-1)^2$ car la fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

$0 \geq -2(a-1)^2 \geq -2(b-1)^2$ multiplication par un nombre réel négatif

$0 \geq -2(a-1)^2+13 \geq -2(b-1)^2+13$

$f(a) \geq f(b)$

Donc la fonction f est décroissante sur $[1;+\infty[$

Exercice 4 **

1) Recherche des valeurs interdites éventuelles en résolvant $x^2+1=0$

   f est définie sur $\mathbb{R}$

2) Pour tout réel x, $f(-x)=\dfrac{3}{(-x)^2+1}=\dfrac{3}{x^2+1}=f(x)$ f est paire

3) a) $f(a)-f(b)=\dfrac{3}{a^2+1}-\dfrac{3}{b^2+1}=3\left(\dfrac{b^2+1-a^2-1}{(a^2+1)(b^2+1)}\right)=\dfrac{3(b+a)(b-a)}{(a^2+1)(b^2+1)}$

   b) Pour a et b appartenant à $[0;+\infty[$ avec $a<b$, $f(a)-f(b)>0$ (dresser un tableau de signes)

   f est décroissante sur $[0;+\infty[$

   c) de la même manière, on montre que f est croissante sur $]-\infty\ ;0]$

4) Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

Exercice 5 **

1) Recherche des valeurs interdites éventuelles en résolvant $x-3=0$

   f est définie sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{3\}$

2) Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ $2+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{2x-5}{x-3}$

3) Pour tous réels a et b appartenant à $]3;+\infty[$ tels que $a \leq b$:

$0 < a-3 \leq b-3$

$\dfrac{1}{a-3} \geq \dfrac{1}{b-3}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

$2+\dfrac{1}{a-3} \geq 2+\dfrac{1}{b-3}$

$f(a) \geq f(b)$ donc f est décroissante sur $]3;+\infty[$

Exercice 6 **

1) Graphiquement :
La fonction f étant une fonction polynôme de degré 2 définie sur tout $\mathbb{R}$, sa représentation graphique est une parabole (courbe en trait plein). La fonction g a une valeur interdite 3 et sa représentation graphique est constituée comme pour la fonction inverse de 2 branches d'hyperbole (courbe en pointillés).

$f(x)=2$ $\mathcal{S}=\{-0,8\ ;\ 3,8\}$

$f(x)=g(x)$ $\mathcal{S}=\{-0,4;\ 2,4\ ;\ 4\}$

2)
a) Antécédents de -1 par f : on résout $f(x)=-1$ $\mathcal{S}=\{0\ ;\ 3\}$

Antécédents de 1 par f : on résout $g(x)=1$ $\mathcal{S}=\varnothing$

b) $(x-1)^2-2=x^2+2x+1-2=x^2-2x-1$

c) Recherche des coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{H}$: les abscisses de ces points vérifient $f(x)=g(x)$

$$x^2-3x-1=1+\frac{2}{x-3}$$

$$\frac{(x-3)\left(x^2-3x-2\right)-2}{x-3}=0$$

$$\frac{x^3-6x^2+7x+4}{x-3}=0$$

D'autre part, $\dfrac{(x-4)\left(x^2-2x-1\right)}{x-3}=\dfrac{x^3+6x^2+7x+4}{x-3}$

Donc $M(x\ ;\ y) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$ si et seulement si $\dfrac{(x-4)\left(x^2-2x-1\right)}{x-3}=0$

$$\frac{(x-4)\left(x^2-2x-1\right)}{x-3}=0$$

$$\frac{(x-4)\left((x-1)^2-2\right)}{x-3}=0$$

$$\frac{(x-4)\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right)}{x-3}=0$$

$\mathcal{S}=\{1-\sqrt{2}\ ;\ 1+\sqrt{2}\ ;\ 4\}$ on retrouve les valeurs lues graphiquement

d) $d(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3x - 1 - \left(1 + \dfrac{2}{x-3}\right) = \dfrac{(x-4)\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right)}{x-3}$ montré au c)

Etude du signe de $d(x)$ et tableau de signes

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		3		4		$+\infty$
Signe de $x-4$		-	|	-	|	-	|	-	0	+	
Signe de $x-1+\sqrt{2}$		-	0	+	|	+	|	+	|	+	
Signe de $x-1-\sqrt{2}$		-	|	-	0	+	|	+	|	+	
Signe de $x-3$		-	|	-	|	-	0	+	|	+	
Signe de $d(x)$		+	0	-	0	+	||	-	0	+	

Conclusion :

Pour $x \in \left]-\infty\,;\,1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}; 3\right[\cup \left[4\,;\,+\infty\right[$, $\mathscr{P}$ est au-dessus de $\mathscr{H}$

Pour $x \in \left[1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\right] \cup \left]3\,;\,4\right]$, , $\mathscr{P}$ est en-dessous de $\mathscr{H}$

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ sont sécants aux points d'abscisses $\mathbf{1-\sqrt{2}}$, $\mathbf{1+\sqrt{2}}$ et 4.

Droites du plan et systèmes de deux équations à deux inconnues

Exercice 1 *

Equation de $(\boldsymbol{d_1})$:

On lit $a = -1$ et $b = 5$: $(\boldsymbol{d_1})$ a pour équation $\boldsymbol{y = -x + 5}$

Equation de $(\boldsymbol{d_2})$:

On lit $b = -2$ et on calcule $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-(-2)}{-4-0} = -\dfrac{3}{2}$

$\mathbf{(d_2)}$ **a pour équation** $\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x - 2}$

Equation de $(\boldsymbol{d_3})$:

On lit $a = 5$ et $b = 0$: $(\boldsymbol{d_3})$ a pour équation $\boldsymbol{y = 5x}$

Equation de $(\boldsymbol{d_4})$:

On lit $a = 0$ (droite horizontale) et $b = -3$: $(\boldsymbol{d_4})$ a pour équation $\boldsymbol{y = -3}$

Equation de $(\boldsymbol{d_5})$:

C'est une droite parallèle à l'axe $(0y)$: $(\boldsymbol{d_5})$ a pour équation $\boldsymbol{x = 3}$

Equation de $(\boldsymbol{d_6})$:

On calcule $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{-1-(-6)} = \dfrac{2}{5}$

Une équation de (d_6) est donc de la forme $y = \dfrac{2}{5}x + b$

Or $A(-6\,;1) \in (d_6)$ donc $y_A = \dfrac{2}{5}x_A + b$ et $b = y_A - \dfrac{2}{5}x_A = 1 - \dfrac{2}{5} \times (-6) = \dfrac{17}{5}$

$\boldsymbol{(d_6)}$ **a pour équation** $\boldsymbol{y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{17}{5}}$

Exercice 2 *

1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$: $ab' - a'b = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$

Le système admet une unique solution que l'on détermine par substitution :

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 5 - x \\ x - (5 - x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 5 - x \\ 2x = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 5 - 3 = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ $\boldsymbol{S = \{(3;2)\}}$

$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 3y = -10 \end{cases}$: $ab' - a'b = 1 \times 3 - (-2) \times (-2) = -1 \neq 0$

Le système admet une unique solution que l'on détermine par substitution :

$\begin{cases} x - 2y \quad = 5 \\ -2x + 3y = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 + 2y \\ -2(5 + 2y) + 3y = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 + 2y \\ -y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 + 0 = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{(\mathbf{5}; \mathbf{0})\}$

$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ x + 5y = 19 \end{cases}$ $: ab' - a'b = 3 \times 5 - 1 \times 4 = 11 \neq 0$

Le système admet une unique solution que l'on détermine par substitution :

$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ x + 5y = 19 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(19 - 5y) + 4y = 24 \\ x = 19 - 5y \end{cases}$ $\begin{cases} -11y = -33 \\ x = 19 - 5y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases}$ $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{(\mathbf{4}; \mathbf{3})\}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$ $: ab' - a'b = 2 \times (-3) - 4 \times 3 = -18 \neq 0$

Le système admet une unique solution que l'on détermine par combinaison :

$\begin{cases} 2x + 3y = -1 & L_1 \\ 4x - 3y = 9 & L_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y = -1 & L_1 \\ -9y = 11 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = -1 - 3 \times \dfrac{-11}{9} = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{-11}{9} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{-11}{9} \end{cases}$

$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} ; \dfrac{\mathbf{-11}}{\mathbf{9}}\right)\right\}$

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$ $: ab' - a'b = 2 \times (-2) - 5 \times 3 = -19 \neq 0$

Le système admet une unique solution que l'on détermine par combinaison :

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & L_1 \\ 5x - 2y = 3 & L_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y = 5 & L_1 \\ 19x = 19 & L_2 \leftarrow 2L_1 + 3L_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3y = 5 - 2 = 3 \\ x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{(\mathbf{1} ; \mathbf{1})\}$

$\begin{cases} 2x - 7y = 11 \\ -5x + 13y = -17 \end{cases}$: $ab' - a'b = 2 \times 13 - (-5) \times (-7) = -9 \neq 0$

Le système admet une unique solution que l'on détermine par combinaison :

$\begin{cases} 2x - 7y = 11 & L_1 \\ -5x + 13y = -17 & L_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 7y = 11 & L_1 \\ -9y = 21 & L_2 \leftarrow 5L_1 + 2L_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 11 + 7 \times \dfrac{-7}{3} = \dfrac{-16}{3} \\ y = \dfrac{-7}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{-8}{3} \\ y = \dfrac{-7}{9} \end{cases}$ $\boldsymbol{\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{-8}{3} ; \dfrac{-7}{3}\right)\right\}}$

Problèmes de géométrie

Exercice 1 *

1) (BC) et (MN) sont parallèles. De plus, les points A, C, N et A, B, N sont alignés dans cet ordre.

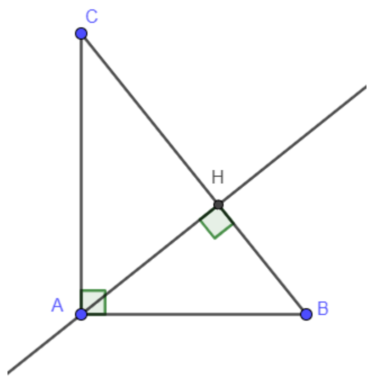
Donc d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$

Ainsi $\boldsymbol{AM} = \dfrac{AB \times AN}{AC} = \dfrac{4{,}5 \times 4{,}8}{3} = \mathbf{7{,}2}$ *et* $\boldsymbol{BC} = \dfrac{AC \times MN}{AN} = \dfrac{3 \times 6{,}4}{4{,}8} = \mathbf{4}$

2) On a : $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{7{,}5}{4{,}5} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{AF}{AB}$. De plus, les points A, C, E et A, B, F sont alignés dans cet ordre.

Donc **d'après la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 2 *



Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

La distance d du point A à la droite (BC) est $d = AH$.

■ Pour calculer AH, calculons l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC de 2 façons différentes :

$$\mathcal{A} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \text{ (triangle ABC rectangle en A)}$$

$$\mathcal{A} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{AH \times BC}{2} \text{ (H le projeté orthogonal de A sur } (BC))$$

$$\text{Ainsi } \frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2} \quad \text{et } \boldsymbol{AH = \frac{AB \times AC}{BC}}$$

■ Pour conclure, calculons AB :

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ et $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$$\text{Finalement } \boldsymbol{d = AH} = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{2\sqrt{7} \times 6}{8} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{2}}$$

Exercice 3 **

1) H étant un point de $[AB]$, $0 \leq AH \leq AB$ et $x \in [0\,;3]$: $\boldsymbol{I = [0\,;3]}$

2) ■ Pour cela, calculons d'abord HK :

(AC) et (HK) sont parallèles (AHKM rectangle et M est un point de $[AC]$).

De plus, les points B, K, C et B, H, A sont alignés dans cet ordre.

$$\text{Donc d'après le théorème de Thalès, } \frac{BK}{BC} = \frac{BH}{BA} = \frac{HK}{AC}$$

$$\text{Ainsi } \boldsymbol{HK} = \frac{BH \times AC}{BA} = \frac{(3 - x) \times 3}{3} = \boldsymbol{3 - x}$$

■ On calcule maintenant l'aire $f(x)$ du trapèze en l'exprimant comme la somme de l'aire $\mathcal{A}_{AHLM}$ du rectangle AHKM et de l'aire $\mathcal{A}_{CMK}$ du triangle rectangle en M CMK :

$$f(x) = \mathcal{A}_{AHLM} + \mathcal{A}_{CMK} = AH \times AM + \frac{MC \times MK}{2}$$

$où\ AM = HK = 3 - x\ , MK = AH = x\ (AHKM\ rectangle)$ et $MC = AC - AM = 3 - (3 - x) = x$

$$\boldsymbol{f(x)} = x(3 - x) + \frac{x \times x}{2} = 3x - x^2 + 0{,}5x^2 = \boldsymbol{3x - 0{,}5x^2}$$

3)a) pour tout $x \in I$,

$$\frac{\boldsymbol{9 - (3 - x)^2}}{\boldsymbol{2}} = \frac{9 - (9 - 6x + x^2)}{2} = \frac{6x - x^2}{2} = \frac{6}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 3x - 0{,}5x^2 = \boldsymbol{f(x)}$$

b) ■ On a $\boldsymbol{f(3)} = \dfrac{9 - (3 - 3)^2}{2} = \boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$.

■ De plus, pour tout $x \in I, f(x) - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{9 - (3 - x)^2}{2} - \dfrac{9}{2} = \dfrac{-(3 - x)^2}{2}$

Un carré étant toujours positif, pour tout $x \in I$ $\dfrac{-(3 - x)^2}{2} \leq 0$ et $f(x) - \dfrac{9}{2} \leq 0$

Ainsi , **pour tout** $\boldsymbol{x \in I, f(x) \leq \dfrac{9}{2}}$

Par conséquent, $\boldsymbol{f}$ admet bien un maximum $\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$ atteint pour $\boldsymbol{x = 3}$.

4. On résout dans $I = [0\,;3]$ $f(x) > 3$

$$\frac{9-(3-x)^2}{2} > 3$$

$$9-(3-x)^2 > 6$$

$$3-(3-x)^2 > 0$$

$$\left(\sqrt{3}-(3-x)\right)\left(\sqrt{3}+(3-x)\right) > 0$$

$$\left(x-(3-\sqrt{3})\right)\left(\sqrt{3}+3-x\right) > 0$$

x	0		$3-\sqrt{3}$		3		$3+\sqrt{3}$	
$\left(x-(3-\sqrt{3})\right)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\left(\sqrt{3}+3-x\right)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\left(x-(3-\sqrt{3})\right)\left(\sqrt{3}+3-x\right)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$\boldsymbol{S} = \left]3-\sqrt{3}\,;3\right]$